language: *Deutsch*

3. **Mitteleuropäische Mathematikolympiade**

Einzelwettbewerb
26. September, 2009

Aufgabe I-1.
Man bestimme alle Funktionen $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ derart, dass

$$f(xf(y)) + f(f(x) + f(y)) = yf(x) + f(x + f(y))$$

für alle $x, y \in \mathbb{R}$, wobei $\mathbb{R}$ die Menge der reellen Zahlen bezeichnet.

Aufgabe I-2.
Wir haben $n \geqslant 3$ paarweise verschiedene Farben. Es sei $f(n)$ die größte ganze Zahl mit der Eigenschaft, dass man die Seiten und Diagonalen eines konvexen Polygons mit $f(n)$ Eckpunkten in der folgenden Weise mit einer dieser n Farben färben kann:

- Es werden mindestens zwei verschiedene Farben verwendet
- Je drei Eckpunkte des Polygons bestimmen drei Strecken, die dieselbe Farbe oder drei verschiedene Farben haben.

Man zeige, dass $f(n) \leqslant (n-1)^2$ mit Gleichheit für unendlich viele Werte von n.

Aufgabe I-3.
Es sei $ABCD$ ein konvexes Viereck, bei dem AB und CD nicht parallel sind und $AB = CD$ gilt. Die Mittelpunkte der Diagonalen AC und BD seien E und F. Die Gerade EF schneide die Strecken AB und CD in G bzw. H. Man zeige, dass $\sphericalangle AGH = \sphericalangle DHG$.

Aufgabe I-4.
Man bestimme alle ganzen Zahlen $k \geqslant 2$, sodass für alle Paare (m, n) verschiedener positiver ganzer Zahlen, die k nicht übersteigen, die Zahl $n^{n-1} - m^{m-1}$ <u>nicht</u> durch k teilbar ist.

Arbeitszeit: 5 Stunden
Zeit für Fragen: 30 Minuten
Bei jeder Aufgabe können 8 Punkte erreicht werden.
Die Aufgaben sind nicht nach Schwierigkeitsgrad geordnet.