language: Polish

3^{rd} Middle European Mathematical Olympiad

Zawody Indywidualne
26 września, 2009

Problem I-1.
Wyznaczyć wszystkie funkcje $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, spełniające dla dowolnych $x, y \in \mathbb{R}$ warunek

$$f(xf(y)) + f(f(x) + f(y)) = yf(x) + f(x + f(y)).$$

(symbol $\mathbb{R}$ oznacza zbiór liczb rzeczywistych.)

Problem I-2.
Dane jest $n \geqslant 3$ różnych kolorów. Niech $f(n)$ będzie największą liczbą całkowitą o następującej własności: możliwe jest takie pokolorowanie wszystkich boków i przekątnych wielokąta wypukłego o $f(n)$ wierzchołkach, że

- wykorzystane są co najmniej dwa różne kolory,
- każde trzy wierzchołki wielokąta wyznaczają trójkąt o wszystkich bokach jednakowego koloru lub o wszystkich bokach różnego koloru.

Dowieść, że $f(n) \leqslant (n-1)^2$ oraz że równość zachodzi dla nieskończenie wielu wartości n.

Problem I-3.
Niech $ABCD$ będzie czworokątem wypukłym, w którym $AB = CD$ oraz proste AB i CD nie są równoległe. Punkty E i F są środkami przekątnych AC i BD. Prosta EF przecina odcinki AB i CD odpowiednio w punktach G i H. Udowodnić, że $\sphericalangle AGH = \sphericalangle DHG$.

Problem I-4.
Wyznaczyć wszystkie liczby całkowite $k \geqslant 2$ o następującej własności: liczba $n^{n-1} - m^{m-1}$ nie jest podzielna przez k dla żadnej pary (m, n) różnych liczb całkowitych dodatnich, mniejszych lub równych k.

Czas zawodów: 5 godzin
Czas na zadawanie pytań: 30 minut
Za każde zadanie można otrzymać maksymalnie 8 punktów.
Kolejność zadań jest niezależna od ich trudności.