language: Deutsch

3. Mitteleuropäische Mathematikolympiade

MANNSCHAFTSWETTBEWERB
27. SEPTEMBER, 2009

Aufgabe T-1.
Es seien x, y und z reelle Zahlen, für die $x^2 + y^2 + z^2 + 9 = 4(x + y + z)$ gilt. Man zeige, dass

$$x^4 + y^4 + z^4 + 16(x^2 + y^2 + z^2) \geqslant 8(x^3 + y^3 + z^3) + 27$$

und bestimme, wann Gleichheit gilt.

Aufgabe T-2.
Es seien a, b und c reelle Zahlen, sodass es für je zwei der Gleichungen

$$x^2 + ax + b = 0, \quad x^2 + bx + c = 0, \quad x^2 + cx + a = 0$$

jeweils genau eine reelle Zahl gibt, die beide erfüllt.
Man bestimme alle möglichen Werte von $a^2 + b^2 + c^2$.

Aufgabe T-3.
Die Zahlen $0, 1, 2, \ldots, n$ $(n \geqslant 2)$ sind auf eine Tafel geschrieben. In jedem Schritt löschen wir eine ganze Zahl, die das arithmetische Mittel von zwei verschiedenen noch auf der Tafel verbliebenen Zahlen ist. Wir machen solche Schritte, bis keine weitere Zahl mehr gelöscht werden kann. Es sei $g(n)$ die kleinste mögliche Anzahl von Zahlen, die am Schluss auf der Tafel übrig bleiben können. Man bestimme $g(n)$ für jedes n.

Aufgabe T-4.
Wir färben jedes Quadrat eines 2009×2009–Brettes in einer von n Farben, wobei nicht alle Farben verwendet werden müssen. Eine Farbe heißt *zusammenhängend*, wenn entweder nur ein Quadrat in dieser Farbe existiert, oder je zwei Quadrate dieser Farbe durch eine Folge von Zügen einer Schachdame voneinander erreichbar sind, ohne zwischendurch auf Quadraten einer anderen Farbe stehen zu bleiben. Man bestimme das größte n, sodass für jede Färbung des Brettes mindestens eine vorkommende Farbe zusammenhängend ist. (Eine Schachdame kann horizontal, vertikal oder diagonal bewegt werden.)

Aufgabe T-5.
Es sei $ABCD$ ein Parallelogramm mit $\sphericalangle BAD = 60°$ und es bezeichne E den Schnittpunkt seiner Diagonalen. Der Umkreis des Dreiecks ACD schneidet die Gerade BA in $K \neq A$, die Gerade BD in $P \neq D$ und die Gerade BC in $L \neq C$. Die Gerade EP schneidet den Umkreis des Dreiecks CEL in den Punkten E und M. Man beweise, dass die Dreiecke KLM und CAP kongruent sind.

Aufgabe T-6.
Es sei $ABCD$ ein Sehnenviereck mit $CD = DA$. Die Punkte E und F liegen auf den Strecken AB bzw. BC, wobei $\sphericalangle ADC = 2\sphericalangle EDF$. Die Strecken DK und DM sind Höhe und Schwerlinie im Dreieck DEF. L sei der zu K bezüglich M symmetrische Punkt. Man beweise, dass die Geraden DM und BL parallel sind.

Aufgabe T-7.
Man bestimme alle Paare (m, n) ganzer Zahlen, die der Gleichung

$$(m + n)^4 = m^2n^2 + m^2 + n^2 + 6mn.$$

genügen.

Aufgabe T-8.
Man bestimme alle nicht–negativen ganzzahligen Lösungen der Gleichung

$$2^x + 2009 = 3^y 5^z.$$

Arbeitszeit: 5 Stunden
Zeit für Fragen: 45 Minuten
Bei jeder Aufgabe können 8 Punkte erreicht werden.
Die Aufgaben sind nicht nach Schwierigkeitsgrad geordnet.