language: Polish

Trzecia Środkowoeuropejska Olimpiada Matematyczna

Zawody Drużynowe
27 września 2009

Zadanie T-1.
Dane są liczby rzeczywiste x, y, z, spełniające zależność $x^2 + y^2 + z^2 + 9 = 4(x + y + z)$. Dowieść, że

$$x^4 + y^4 + z^4 + 16(x^2 + y^2 + z^2) \geqslant 8(x^3 + y^3 + z^3) + 27$$

oraz rozstrzygnąć, kiedy zachodzi równość.

Zadanie T-2.
Liczby rzeczywiste a, b, c posiadają tę własność, że dla każdych dwóch spośród równań

$$x^2 + ax + b = 0, \quad x^2 + bx + c = 0, \quad x^2 + cx + a = 0$$

istnieje dokładnie jedna liczba będąca rozwiązaniem ich obu. Wyznaczyć wszystkie możliwe wartości wyrażenia $a^2 + b^2 + c^2$.

Zadanie T-3.
Na tablicy napisano liczby $0, 1, 2, \ldots, n$ $(n \geqslant 2)$. W każdym kroku wymazujemy liczbę będącą średnią arytmetyczną dwóch różnych, jeszcze nie wymazanych liczb. Postępowanie to kontynuujemy tak długo, jak jest to możliwe. Niech $g(n)$ będzie najmniejszą możliwą ilością liczb pozostawionych na tablicy. Wyznaczyć $g(n)$ w zależności od n.

Zadanie T-4.
Każde z pól szachownicy o wymiarach 2009×2009 kolorujemy jednym z n kolorów (nie każdy kolor musi być wykorzystany). Mówimy, że kolor jest *spójny*, jeżeli dla dowolnych dwóch pól tego koloru można za pomocą ciągu ruchów przeprowadzić hetmana z jednego pola na drugie, stawiając go jedynie na polach w tym kolorze. W szczególności, jeśli pewnym kolorem pomalowano tylko jedno pole, to również jest on spójny. Wyznaczyć największą liczbę n, dla której przy dowolnym kolorowaniu szachownicy co najmniej jeden z kolorów jest spójny.
Uwaga: Ruch hetmanem polega na przesunięciu go o dowolną liczbę pól w pionie, poziomie lub po skosie.

Zadanie T-5.
Niech $ABCD$ będzie równoległobokiem, w którym $\sphericalangle BAD = 60^\circ$. Przekątne tego równoległoboku przecinają się w punkcie E. Okrąg opisany na trójkącie ACD przecina po raz drugi proste BA, BD, BC w punktach odpowiednio K, P, L. Prosta EP przecina okrąg opisany na trójkącie CEL w punkcie $M \neq E$. Udowodnić, że trójkąty KLM i CAP są przystające.

Zadanie T-6.

Czworokąt $ABCD$ wpisany jest w okrąg, przy czym $CD = DA$. Na odcinkach AB i BC wybrano punkty odpowiednio E i F, dla których $\sphericalangle ADC = 2\sphericalangle EDF$. Odcinek DK jest wysokością trójkąta DEF, zaś DM jego środkową. Punkt L jest symetryczny do K względem M. Wykazać, że proste DM oraz BL są równoległe.

Zadanie T-7.

Znaleźć wszystkie pary (m, n) liczb całkowitych, spełniające równanie

$$(m+n)^4 = m^2n^2 + m^2 + n^2 + 6mn.$$

Zadanie T-8.

Rozwiązać równanie

$$2^x + 2009 = 3^y 5^z$$

w liczbach całkowitych nieujemnych x, y, z.

Czas trwania zawodów: 5 godzin.
Czas na zadawanie pytań: 45 minut.
Za każde zadanie można otrzymać maksymalnie 8 punktów.
Kolejność zadań jest niezależna od ich trudności.